

OPTIMASI DISTRIBUSI AIR BERSIH MENGGUNAKAN *MULTI-OBJECTIVE TRANSPORTATION PROBLEM*

Mahdiyyah Rahmawati

(S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: mahdiyyahr24@gmail.com

Yuliani Puji Astuti, S.Si., M.Si.

(Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)
e-mail: yulianipuji@unesa.ac.id

Abstrak

Transportasi adalah salah satu permasalahan dalam riset operasi yang berfungsi mengelola distribusi secara optimal dari sumber penyedia barang menuju tempat tujuan yang memerlukan barang (Simbolon dkk., 2014). Masalah transportasi yang memiliki beberapa fungsi tujuan disebut *Multi-Objective Transportation Problem*. Fuzzy Programming menerapkan teori himpunan fuzzy untuk masalah multikriteria dalam membuat keputusan. Fungsi keanggotaan berperan memetakan data ke dalam nilai keanggotaan fuzzy di $[0,1]$ dalam fungsi tujuan. Tujuan penelitian ini mengembangkan model optimasi distribusi air bersih di PDAM Surabaya menggunakan *Multi-Objective Transportation Problem* untuk mencari waktu dan biaya optimal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi objektif waktu (Z_1) yaitu Minimumkan: $Z_1 = 0,69x_{14} + 0,69x_{15} + 0,4x_{25} + 0,833x_{31} + 0,833x_{32} + 0,833x_{33} + 1,25x_{34} + 1,25x_{35} + 1,379x_{41} + 0,769x_{42} + 1,379x_{43} + 1,177x_{44} + 0,635x_{45} + x_{51} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + 0,588x_{62} + 0,588x_{63}$, menghasilkan waktu optimal sebesar 8 jam 23 menit 6 detik dan fungsi objektif biaya (Z_2) yaitu Minimumkan: $Z_2 = 154,121x_{14} + 154,121x_{15} + 222,005x_{25} + 145,428x_{31} + 145,428x_{32} + 145,428x_{33} + 145,486x_{34} + 145,486x_{35} + 246,134x_{41} + 246,115x_{42} + 246,134x_{43} + 246,3x_{44} + 246,22x_{45} + 155,6x_{51} + 155,6x_{53} + 155,6x_{54} + 155,6x_{55} + 182,714x_{62} + 182,714x_{63}$, menghasilkan biaya optimal sebesar Rp3.627.443,876.

Kata Kunci: Metode Transportasi, *Multi-Objective*, dan Distribusi.

Abstract

Transportation is one of the operations research problems that used to manage distribution optimally from the sources that provide products to the place that requires (Simbolon et al., 2014). Transportation problems which has several objectives function is called *Multi-Objective Transportation Problems*. Fuzzy Programming apply fuzzy set theory to multicriteria problems in making decisions. Membership function used to map data into fuzzy membership value at $[0,1]$ in objectives function. The purpose of this study to develop an optimization model of clean water distribution in PDAM Surabaya using *Multi-Objective Transportation Problem* to find optimal time and cost. The results show that the objective time function (Z_1) is Minimize: $Z_1 = 0,69x_{14} + 0,69x_{15} + 0,4x_{25} + 0,833x_{31} + 0,833x_{32} + 0,833x_{33} + 1,25x_{34} + 1,25x_{35} + 1,379x_{41} + 0,769x_{42} + 1,379x_{43} + 1,177x_{44} + 0,635x_{45} + x_{51} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + 0,588x_{62} + 0,588x_{63}$, with optimum result of time is 8 hours 23 minutes 6 seconds and the objective cost function (Z_2) is Minimize: $Z_2 = 154,121x_{14} + 154,121x_{15} + 222,005x_{25} + 145,428x_{31} + 145,428x_{32} + 145,428x_{33} + 145,486x_{34} + 145,486x_{35} + 246,134x_{41} + 246,115x_{42} + 246,134x_{43} + 246,3x_{44} + 246,22x_{45} + 155,6x_{51} + 155,6x_{53} + 155,6x_{54} + 155,6x_{55} + 182,714x_{62} + 182,714x_{63}$, with optimum result of cost is Rp3.627.443,876.

Keyword: Transportation Method, *Multi-Objective Transportation Problem*, and Distribution.

PENDAHULUAN

Air adalah hal yang penting bagi kehidupan, karena setiap makhluk hidup membutuhkan air. Pemakaian air terus bertambah seiring perkembangan populasi. Pemerintah memberi kekuasaan Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Surya Sembada Kota Surabaya selaku Badan Usaha Milik Daerah (BUMD) untuk mengelola persediaan air bersih untuk masyarakat daerah Kota Surabaya.

Masalah distribusi adalah permasalahan yang kerap dialami PDAM. Masalah pendistribusian air sangat mempengaruhi waktu dan biaya operasional yang diperlukan. Dalam masalah pendistribusian diperlukan analisis supaya waktu dan biaya sistem distribusi yang dikeluarkan efisien.

Masalah distribusi air bisa dimodelkan menggunakan riset operasi. Salah satu permasalahan riset operasi untuk memodelkan adalah permasalahan transportasi. Metode transportasi adalah metode yang berfungsi untuk mengelola distribusi barang secara optimal yang berasal dari sumber yang menyuplai barang menuju tempat tujuan yang memerlukan barang sehingga waktu dan biaya distribusi minimum (Simbolon dkk., 2014).

Dalam menentukan keputusan terdapat beberapa tujuan yang harus diperhatikan sehingga masalah transportasi menjadi transportasi tujuan non-tunggal. Masalah transportasi yang terdiri dari beberapa tujuan yang saling bertentangan dan tidak dapat dibandingkan disebut *Multi-Objective Transportation Problem* (Yeola, 2016). Untuk memecahkan permasalahan multiobjektif, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan. *Fuzzy Programming* merupakan salah satu metode yang bisa digunakan. *Fuzzy Programming* adalah penerapan teori himpunan fuzzy untuk masalah multikriteria dalam membuat keputusan.

Malati C. Yeola (2016) menguraikan bahwa penalti (biaya, waktu, dll) berperan sebagai nilai keanggotaan. Pendekatan fungsi merupakan suatu upaya yang bisa digunakan untuk memperoleh nilai keanggotaan. Fungsi keanggotaan berperan untuk memetakan titik input data ke dalam nilai keanggotaan fuzzy yang merentang di 0 sampai 1 dan direpresentasikan oleh suatu kurva yang kontinu dimana semakin tinggi nilai keanggotaan maka semakin dekat pula dengan solusi optimal. Representasi Linear adalah salah satu pendekatan fungsi yang dapat digunakan.

Dalam representasi linear, input data dipetakan ke derajat keanggotaan yang direpresentasikan oleh garis lurus. Bentuk fungsi ini merupakan pilihan baik yang berguna mendekati sebuah konsep yang belum diketahui kesesuaian antara data dengan

pendekatan fungsi yang lain karena paling sederhana.

Berdasarkan uraian diatas, maka tujuan penelitian ini adalah mengembangkan model optimasi distribusi air bersih dengan tolok ukur waktu, biaya, permintaan dan persediaan air pada wilayah pengelolaan dari Perusahaan Daerah Air Minum menggunakan *Multi-Objective Transportation Problem* untuk mencari solusi optimal sehingga distribusi air merata di semua wilayah dengan waktu dan biaya minimum.

KAJIAN PUSTAKA

A. Distribusi Air

Sistem distribusi air dibentuk dari pipa-pipa, katup, dan melalui pompa dimana air yang telah diolah berpindah dari pabrik pengolahan menuju rumah-rumah, kantor, industri, dan konsumen lainnya. Distribusi air terbagi menjadi tiga komponen yaitu pipa distribusi, penyimpanan distribusi, dan stasiun pemompaan distribusi.

B. Model Transportasi

Model Transportasi adalah kasus khusus dari program linear yang menguraikan mengenai pengangkutan unit dari sumber ke tujuan untuk menentukan total biaya pengangkutan untuk memenuhi batas penawaran dan permintaan (Taha, 2003). Secara umum, model transportasi dapat digambarkan dalam yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Tabel Transportasi

Dari Ke		Tujuan				Penawaran (supply)
		1	2	...	n	
Sumber	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2

	m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m
Permintaan (demand)		b_1	b_2	...	b_n	

Dalam bentuk matematika, Herjanto (2008) menguraikan bahwa permasalahan transportasi dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan: } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i && ; i = 1, 2, 3, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j && ; j = 1, 2, 3, \dots, n \\ \text{dan } x_{ij} &\geq 0 && ; \text{ untuk semua } i \text{ dan } j \end{aligned}$$

Dimana:

x_{ij} = unit yang dikirim dari i ke j

c_{ij} = biaya setiap unit dari i ke j

a_i = kapasitas penawaran (supply) sumber i

b_i = kapasitas permintaan (*demand*) tujuan j
 $i = 1, 2, \dots, m$
 $j = 1, 2, \dots, n$.

C. Penyelesaian Layak Masalah Transportasi

Untuk dapat memperoleh solusi yang optimal, suatu permasalahan transportasi harus memiliki penyelesaian layak yaitu

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Syarat bahwa supply total harus sama dengan demand total menunjukkan bahwa sistem seimbang. Jika syarat tidak dipenuhi, maka dimasukkan suatu "sumber" atau "tujuan" yang semu untuk mengatasi slack supaya ketidakseimbangan diubah menjadi kesamaan dan memenuhi syarat layak (Hillier and Lieberman, 1990).

D. Multi-Objective Transportation Problem (MOTP)

Dalam bentuk matematika *Multi-Objective Transportation Problem* dapat dinyatakan sebagai berikut:

Minimumkan: $Z_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij}, k = 1, 2, \dots, p$

Dengan kendala,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad ; i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad ; j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad ; \text{ untuk semua } i \text{ dan } j$$

dimana k pada Z_k dan c_{ij}^k digunakan untuk mengidentifikasi jumlah fungsi objektif (Ringuest and Rinks, 1987).

E. Fuzzy

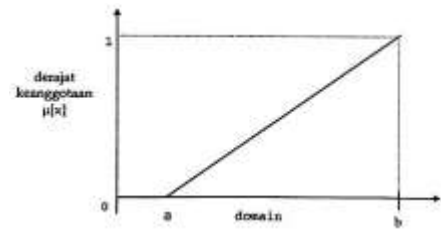
Sri Kusumadewi dan Hari I. Purnomo (2004) menguraikan bahwa logika fuzzy merupakan metode yang baik untuk pemetaan dari ruang input ke ruang output. Nilai keanggotaan pada himpunan fuzzy berada pada interval 0 sampai 1. Terdapat beberapa hal yang harus diketahui di sistem fuzzy, yaitu:

1. Variabel Fuzzy
2. Himpunan Fuzzy
3. Semesta Pembicaraan
4. Domain

Fungsi Keanggotaan atau *membership function* ialah suatu kurva yang merepresentasikan pemetaan dari titik input data ke nilai keanggotaan yang memiliki interval 0 sampai 1. Pendekatan fungsi merupakan suatu metode yang bisa digunakan untuk memperoleh nilai keanggotaan. Representasi Linear merupakan suatu pendekatan fungsi yang dapat digunakan.

Dalam representasi linear, pemetaan dari input data ke derajat keanggotaan direpresentasikan oleh garis lurus. Bentuk fungsi ini merupakan pilihan tepat untuk mendekati konsep yang belum diketahui kesesuaian antara data dengan pendekatan fungsi yang lain paling sederhana. Himpunan fuzzy linear

terbagi menjadi 2 macam. Pertama yaitu himpunan naik dari domain yang memiliki derajat keanggotaan nol berjalan menuju ke kanan dengan domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi seperti pada Gambar 1.

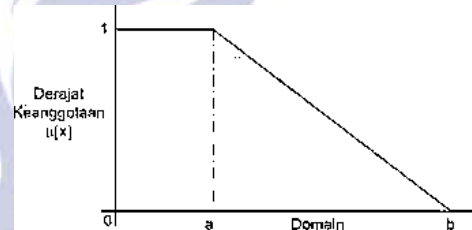


Gambar 1. Representasi Linear Naik

Rumus fungsi keanggotaan dari representasi linear naik adalah:

$$\mu[x] = \begin{cases} 0 & ; x \leq a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & ; a \leq x \leq b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}$$

Representasi linear yang kedua adalah oposisi dari representasi linear naik. Garis lurus bergerak dari sisi kiri dengan domain yang mempunyai derajat keanggotaan paling tinggi kemudian menurun menuju domain dengan derajat keanggotaan yang lebih rendah dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Representasi Linear Turun

Rumus fungsi keanggotaan dari representasi linear turun adalah:

$$\mu[x] = \begin{cases} 1 & ; x \leq a \\ \frac{(b-x)}{(b-a)} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; x \geq b \end{cases}$$

Terdapat 3 operator dasar yang dibuat oleh Zadeh, yaitu:

1. Operator AND
2. Operator OR
3. Operator NOT

Secara umum terdapat 2 fungsi implikasi yang bisa digunakan, yaitu:

1. Min (minimum)
2. Dot (product)

F. Fuzzy Programming untuk Penyelesaian MOTP

Pada definisi dasar L_k dan U_k , Biswal memberikan fungsi keanggotaan dari permasalahan multi-objektif yang dapat diterapkan untuk MOTP seperti berikut:

$$\mu_k(x_{ij}^k) = \begin{cases} 1 & , x_{ij}^k \leq L_k \\ \frac{U_k - x_{ij}^k}{U_k - L_k} & , L_k < x_{ij}^k < U_k \\ 0 & , x_{ij}^k \geq U_k \end{cases}$$

dimana $L_k \neq U_k$, $k = 1, 2, \dots, p$. Jika $L_k = U_k$, maka $\mu_k(x_{ij}^k) = 1$ untuk semua k .

Malati C. Yeola (2016) menguraikan bahwa langkah solusi penyelesaian dari masalah MOTP adalah sebagai berikut:

1. Hitung nilai keanggotaan dari setiap sel dan setiap tabel objektif
2. Buat tabel baru dimana setiap sel mempunyai nilai keanggotaan minimum dari semua tabel objektif
3. Perhatikan baris pertama dan cari nilai keanggotaan maksimum, alokasikan sebanyak mungkin pada sel. Jika terdapat nilai yang sama maka bandingkan dua kolom dan alokasikan sebanyak mungkin untuk kolom yang memiliki elemen minimum pada baris berikutnya
4. Jika suplai dalam baris telah habis, pergi ke baris berikutnya dan ulangi langkah 3. Jika persediaan di kolom telah habis, cari nilai keanggotaan maksimum berikutnya di baris yang sama dan alokasikan sebanyak mungkin pada sel.
5. Ulangi langkah 3 dan 4 hingga *supply* dan *demand* habis.

G. Debit Aliran Fluida

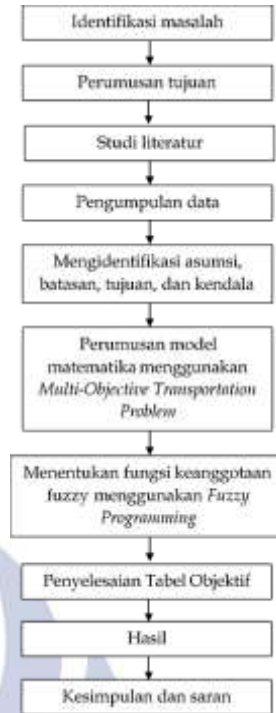
Debit aliran fluida (biasa disebut debit) adalah jumlah volume fluida yang dialirkan per satuan waktu. Banyaknya fluida yang mengalir per satuan waktu disebut debit aliran atau laju aliran. Secara matematis dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = \frac{V}{t}$$

dengan Q = debit aliran fluida (m^3/s), V = volume fluida (m^3), dan t = selang waktu (s).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya. Pada penelitian ini menggunakan sumber data sekunder yang diperoleh dari pada PDAM Surya Sembada Kota Surabaya. Data dalam penelitian ini meliputi data Instalasi Pemasangan Air, daerah tujuan pendistribusian air bersih, gambar pipa jaringan air, kapasitas maksimum produksi, jumlah pemakaian air bersih, debit air dan daya listrik. Prosedur yang disusun dalam rangka untuk mencapai tujuan penelitian disajikan dalam Bagan 1.



Bagan 1. Alur Proses Penelitian

PEMBAHASAN

A. Data Penelitian

PDAM Surya Sembada Kota Surabaya memiliki enam Instalasi Pemasangan Air yaitu Karangpilang I, Karangpilang II, Karangpilang III, Ngagel I, Ngagel II, dan Ngagel III dengan kapasitas berbeda-beda.

Tabel 2. Kapasitas Instalasi Pemasangan Air PDAM Surya Sembada Kota Surabaya

Instalasi	Kapasitas (m^3)
Karangpilang I	3.000
Karangpilang II	9.450
Karangpilang III	5.534
Ngagel I	5.739
Ngagel II	431
Ngagel III	3.600
Jumlah	27.754

Daerah pendistribusian di Surabaya dibagi menjadi lima zona pengiriman seperti pada Gambar 3 dan jalur perpipaan penyaluran air bersih dari masing-masing IPAM menuju ke lima zona di Surabaya disajikan pada Gambar 4.



Gambar 3. Peta Sub Zona PDAM Surabaya

Berdasarkan pembagian zona pendistribusian air bersih dari jalur pendistribusian air bersih PDAM Surya Sembada Kota Surabaya, maka dapat diketahui tujuan pendistribusian setiap Instalasi Pemasangan Air ke zona yang dilakukan oleh PDAM Surya Sembada Kota Surabaya dengan rincian yang disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Tujuan Pendistribusian Setiap IPAM

Instalasi	Tujuan
Karangpilang I	Zona 4, Zona 5
Karangpilang II	Zona 5
Karangpilang III	Zona 1, Zona 2, Zona 3, Zona 4, Zona 5
Ngagel I	Zona 1, Zona 2, Zona 3, Zona 4, Zona 5
Ngagel II	Zona 1, Zona 3, Zona 4, Zona 5
Ngagel III	Zona 2, Zona 3

PDAM Surya Sembada Kota Surabaya memiliki lima zona dengan data rata-rata jumlah permintaan air bersih untuk satu hari dari setiap zona masing-masing pendistribusian air bersih disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4. Permintaan Setiap Zona PDAM Surabaya

Sub Zona	Permintaan (m ³)
Zona 1	3.501,910
Zona 2	4.230,794
Zona 3	2.306,373
Zona 4	4.035,615
Zona 5	4.918,381
Jumlah	18.993,073

PDAM Surya Sembada Kota Surabaya memiliki beberapa pompa distribusi dengan debit air dan jumlah pompa yang berbeda-beda pada setiap Instalasi Pemasangan Air. Kapasitas debit air untuk setiap jalur aliran pendistribusian dari Instalasi Pemasangan Air menuju ke zona tujuan yang disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Debit Air IPAM ke Zona Tujuan

Instalasi	Tujuan	Debit (m ³ /dt)
Karangpilang I	Zona 4	0,725
	Zona 5	0,725
Karangpilang II	Zona 5	2,5
Karangpilang III	Zona 1	0,4
	Zona 2	0,4
	Zona 3	0,4
	Zona 4	0,4
	Zona 5	0,4

Ngagel I	Zona 1	0,223
	Zona 2	0,565
	Zona 3	0,223
	Zona 4	0,283
	Zona 5	0,506
Ngagel II	Zona 1	0,25
	Zona 3	0,25
	Zona 4	0,25
	Zona 5	0,25
Ngagel III	Zona 2	0,85
	Zona 3	0,85

Dari rincian debit air setiap jalur distribusi pada Tabel 5 akan diterapkan rumus fluida $Q = \frac{V}{t}$ dengan V adalah volume air dan Q adalah debit air setiap instalasi ke zona tujuan, sehingga dapat diperoleh waktu (detik) yang dibutuhkan untuk pendistribusian satu m³ air bersih dari setiap Instalasi Pemasangan Air menuju ke zona tujuan yang disajikan pada Tabel 6.

Tabel 6. Waktu (Detik) Distribusi dari IPAM ke Tujuan

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5
Karangpilang I				1,379	1,379
Karangpilang II					0,4
Karangpilang III	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Ngagel I	4,484	1,7699	4,484	3,534	1,976
Ngagel II	4		4	4	4
Ngagel III		1,177	1,177		

Daya listrik pompa distribusi untuk setiap jalur aliran pendistribusian dari Instalasi Pemasangan Air menuju ke zona tujuan yang disajikan pada Tabel 7.

Tabel 7. Daya Listrik IPAM ke Zona Tujuan

Instalasi	Tujuan	Daya Listrik (Watt)
Karangpilang I	Zona 4	344.520
	Zona 5	344.520
Karangpilang II	Zona 5	1.712.117,646
Karangpilang III	Zona 1	179.520
	Zona 2	179.520
	Zona 3	179.520
	Zona 4	179.520
	Zona 5	179.520
Ngagel I	Zona 1	169.294,521
	Zona 2	428.773,972
	Zona 3	169.294,521
	Zona 4	215.178,082
	Zona 5	384.472,603
Ngagel II	Zona 1	120.000
	Zona 3	120.000
	Zona 4	120.000
	Zona 5	120.000
Ngagel III	Zona 2	479.287,531
	Zona 3	479.287,531

Dari rincian daya listrik setiap jalur distribusi air bersih pada Tabel 7 akan diterapkan rumus biaya listrik yaitu $biaya = waktu \times \frac{watt}{1000} \times harga\ listrik$, dengan harga listrik setiap kWh Rp1.167,00, sehingga dapat diperoleh biaya (Rupiah) yang dibutuhkan untuk pendistribusian satu m³ air bersih dari setiap Instalasi Pemasangan Air menuju ke zona tujuan yang disajikan pada Tabel 8.

Tabel 8. Biaya (Rp) Distribusi dari IPAM ke Tujuan

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5
Karangpilang I				154,009	154,009
Karangpilang II					222,005
Karangpilang III	145,486	145,486	145,486	145,486	145,486
Ngagel I	246,08	246,006	246,08	246,509	246,275
Ngagel II	155,6		155,6	155,6	155,6
Ngagel III		182,869	182,869		

B. Model Matematika *Multi-Objective Transportation Problem*

Untuk mengetahui model matematika *Multi-Objective Transportation Problem* dari permasalahan waktu dan biaya, diperlukan adanya data yang berkaitan dengan alokasi produk. Selanjutnya data tersebut dimasukkan ke tabel objektif transportasi waktu dan tabel objektif transportasi biaya yang disajikan pada Tabel 9 dan Tabel 10.

Tabel 9. Tabel Objektif Transportasi Waktu

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Supply (m ³)
KP I				1,379	1,379	3.000
KP II					0,4	9.450
KP III	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	5.534
Ngagel I	4,484	1,7699	4,484	3,534	1,976	5.739
Ngagel II	4		4	4	4	431
Ngagel III		1,177	1,177			3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	27.754 18.993,073

Tabel 10. Tabel Objektif Transportasi Biaya

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Supply (m ³)
KP I				154,009	154,009	3.000
KP II					222,005	9.450
KP III	145,486	145,486	145,486	145,486	145,486	5.534
Ngagel I	246,08	246,006	246,08	246,509	246,275	5.739
Ngagel II	155,6		155,6	155,6	155,6	431
Ngagel III		182,869	182,869			3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	27.754 18.993,073

Berikut ini adalah kendala yang harus terpenuhi dalam menyusun model distribusi air bersih:

$$x_{14} + x_{15} \leq 3000$$

$$x_{25} \leq 9450$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 5534$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \leq 5739$$

$$x_{51} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \leq 431$$

$$x_{62} + x_{63} \leq 3600$$

$$x_{31} + x_{41} + x_{51} \leq 3501,91$$

$$x_{32} + x_{42} + x_{62} \leq 4230,794$$

$$x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} \leq 2306,373$$

$$x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{64} \leq 4035,615$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} \leq 4918,381$$

$$x_{ij} \geq 0 ; \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, 6 \text{ dan } j = 1, 2, \dots, 5$$

Sehingga fungsi objektif waktu (Z_1) dan fungsi objektif biaya (Z_2) dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan: } Z_1 = 1,379x_{14} + 1,379x_{15} + 0,4x_{25} + 2,5x_{31} + 2,5x_{32} + 2,5x_{33} + 2,5x_{34} + 2,5x_{35} + 4,484x_{41} + 1,7699x_{42} + 4,484x_{43} + 3,534x_{44} + 1,976x_{45} + 4x_{51} + 4x_{53} + 4x_{54} + 4x_{55} + 1,177x_{62} + 1,177x_{63}$$

$$\text{Minimumkan: } Z_2 = 154,009x_{14} + 154,009x_{15} + 222,005x_{25} + 145,486x_{31} + 145,486x_{32} + 145,486x_{33} + 145,486x_{34} + 145,486x_{35} + 246,08x_{41} + 246,006x_{42} + 246,08x_{43} + 246,509x_{44} + 246,275x_{45} + 155,6x_{51} + 155,6x_{53} + 155,6x_{54} + 155,6x_{55} + 182,869x_{62} + 182,869x_{63}$$

C. Penyelesaian Layak

Untuk memperoleh solusi yang layak dan optimal, *supply* total harus sama dengan *demand* total. Oleh karena itu akan ditambahkan suatu tujuan semu (dummy) yang disajikan pada Tabel 11 dan Tabel 12.

Tabel 11. Tabel Objektif Transportasi Layak Waktu

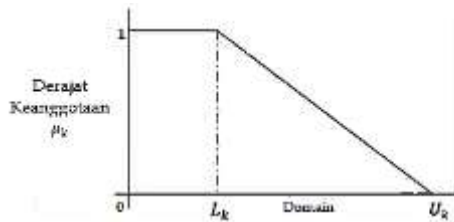
	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy	Supply (m ³)
KP I				1,379	1,379		3.000
KP II					0,4		9.450
KP III	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5		5.534
Ngagel I	4,484	1,7699	4,484	3,534	1,976		5.739
Ngagel II	4		4	4	4		431
Ngagel III		1,177	1,177				3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	8.760,927	27.754

Tabel 12. Tabel Objektif Transportasi Layak Biaya

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy	Supply (m ³)
KP I				154,009	154,009		3.000
KP II					222,005		9.450
KP III	145,486	145,486	145,486	145,486	145,486		5.534
Ngagel I	246,08	246,006	246,08	246,509	246,275		5.739
Ngagel II	155,6		155,6	155,6	155,6		431
Ngagel III		182,869	182,869				3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	8.760,927	27.754

D. Nilai Keanggotaan Tabel Objektif

Berikut adalah representasi linier untuk fungsi keanggotaan tabel objektif:



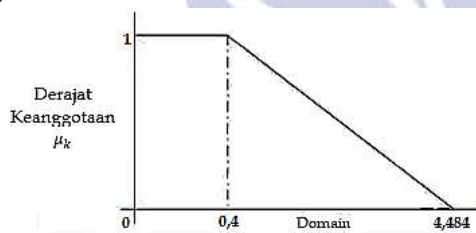
Gambar 4. Representasi Linier Fungsi Keanggotaan

Maka dapat diketahui rumus fungsi keanggotaan fuzzy untuk tabel objektif adalah:

$$\mu_k(x_{ij}^k) = \begin{cases} 1, & x_{ij}^k \leq L_k \\ \frac{U_k - x_{ij}^k}{U_k - L_k}, & L_k < x_{ij}^k < U_k \\ 0, & x_{ij}^k \geq U_k \end{cases}$$

dimana L_k dan U_k masing-masing adalah batas bawah dan batas atas fungsi objektif waktu dan fungsi objektif biaya dengan $k = 1, 2$.

Untuk memperoleh nilai keanggotaan fuzzy untuk objektif waktu dan objektif biaya, terlebih dahulu lihat batas atas dan batas bawah dari setiap tabel objektif. Berdasarkan tabel objektif waktu dapat diketahui batas atas sebesar 0,4 dan batas bawah sebesar 4,484. Sehingga dapat diperoleh representasi fungsi keanggotaan fuzzy untuk objektif waktu adalah:



Gambar 5. Representasi Linear Fungsi Keanggotaan Waktu

Berdasarkan representasi linear turun fungsi keanggotaan fuzzy waktu pada Gambar 5 dapat diketahui bahwa $L_1 = 0,4$ dan $U_1 = 4,484$ yang selanjutnya akan diterapkan pada rumus fungsi keanggotaan fuzzy. Sehingga dapat diperoleh fungsi keanggotaan fuzzy tabel objektif waktu adalah:

$$\mu_{waktu}(x_{ij}^1) = \begin{cases} 1, & x_{ij}^1 \leq 0,4 \\ \frac{4,484 - x_{ij}^1}{4,484 - 0,4}, & 0,4 < x_{ij}^1 < 4,484 \\ 0, & x_{ij}^1 \geq 4,484 \end{cases}$$

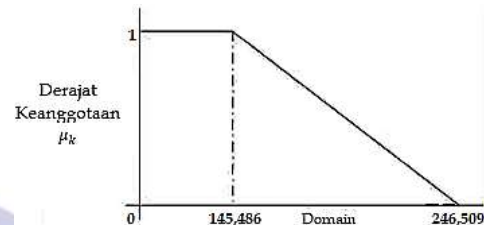
Nilai keanggotaan fuzzy untuk objektif waktu diperoleh dengan menggunakan rumus fungsi keanggotaan fuzzy objektif waktu dengan x_{ij}^1 adalah waktu pada tabel objektif waktu. Nilai keanggotaan fuzzy tabel objektif waktu yang telah diperoleh diterapkan ke dalam tabel baru. Sehingga nilai keanggotaan fuzzy untuk tabel objektif waktu disajikan pada Tabel 13.

Tabel 13. Nilai Keanggotaan Tabel Objektif Waktu

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy
Karangpilang I				0,76	0,76	
Karangpilang II					1	
Karangpilang III	0,486	0,486	0,486	0,486	0,486	

Ngagel I	0	0,665	0	0,233	0,614	
Ngagel II	0,119		0,119	0,119	0,119	
Ngagel III		0,81	0,81			

Selanjutnya untuk mencari nilai keanggotaan objektif waktu, lihat batas atas dan batas bawah dari tabel objektif biaya. Berdasarkan tabel objektif biaya dapat diketahui batas atas sebesar 145,486 dan batas bawah sebesar 246,509. Sehingga dapat diperoleh representasi fungsi keanggotaan fuzzy untuk objektif waktu adalah:



Gambar 6. Representasi Linear Fungsi Keanggotaan Biaya

Berdasarkan representasi linear turun fungsi keanggotaan fuzzy biaya pada Gambar 6 dapat diketahui bahwa $L_2 = 145,486$ dan $U_2 = 246,509$. Selanjutnya L_2 dan U_2 yang telah diketahui akan diterapkan pada rumus fungsi keanggotaan fuzzy. Sehingga dapat diperoleh rumus fungsi keanggotaan fuzzy untuk tabel objektif biaya adalah:

$$\mu_{biaya}(x_{ij}^2) = \begin{cases} 1, & x_{ij}^2 \leq 145,486 \\ \frac{246,509 - x_{ij}^2}{246,509 - 145,486}, & 145,486 < x_{ij}^2 < 246,509 \\ 0, & x_{ij}^2 \geq 246,509 \end{cases}$$

Nilai keanggotaan fuzzy untuk objektif biaya diperoleh dengan menggunakan rumus fungsi keanggotaan fuzzy objektif biaya dengan x_{ij}^2 adalah biaya pada tabel objektif biaya. Nilai keanggotaan fuzzy tabel objektif biaya yang telah diperoleh diterapkan ke dalam tabel baru. Sehingga nilai keanggotaan fuzzy untuk tabel objektif biaya disajikan pada Tabel 14.

Tabel 14. Nilai Keanggotaan Tabel Objektif Biaya

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy
Karangpilang I				0,916	0,916	
Karangpilang II					0,243	
Karangpilang III	1	1	1	1	1	
Ngagel I	0,004	0,005	0,004	0	0,002	
Ngagel II	0,9		0,9	0,9	0,9	
Ngagel III		0,63	0,63			

E. Penyelesaian Permasalahan Distribusi Air Bersih di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya

Berdasarkan data yang telah diperoleh dan model matematika *Multi-Objective Transportation Problem* yang telah dibuat, selanjutnya nilai keanggotaan tabel objektif yang telah didapatkan akan diproses menggunakan langkah penyelesaian MOTP menurut Malati C. Yeola (2016). Dari nilai keanggotaan tabel objektif waktu dan nilai keanggotaan tabel objektif biaya berturut-turut pada Tabel 13 dan 14 diperoleh nilai keanggotaan minimum pada tiap sel waktu dan biaya yang disajikan pada Tabel 15.

Tabel 15. Nilai Keanggotaan Minimum dari Tabel Objektif Waktu dan Tabel Objektif Biaya

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy
Karangpilang I				0,76	0,76	
Karangpilang II					0,243	
Karangpilang III	0,486	0,486	0,486	0,486	0,486	
Ngagel I	0	0,005	0	0	0,002	
Ngagel II	0,119		0,119	0,119	0,119	
Ngagel III		0,63	0,63			

Setelah memperoleh nilai keanggotaan minimum dari tabel objektif waktu dan tabel objektif biaya, maka hasil yang diperoleh akan digunakan untuk alokasi unit. Dengan cara yang telah diberikan, alokasikan unit hingga *supply* dan *demand* habis, maka diperoleh hasil alokasi unit untuk setiap sel yang disajikan pada Tabel 16.

Tabel 16. Hasil Alokasi Unit Setiap Sel berdasarkan Nilai Keanggotaan

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy	Supply
KP I				3.000			3.000
KP II				4.918,381	4.531,619		9.450
KP III	3.501,91		996,475	1.035,615			5.534
Ngagel I		4.230,794			1.508,206		5.739
Ngagel II			431				431
Ngagel III			878,898		2.721,102		3.600
Demand	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	8.760,927	27.754

Setelah hasil alokasi unit tiap sel diperoleh, selanjutnya data hasil alokasi produk dimasukkan ke dalam tabel objektif waktu dan tabel objektif biaya. Hasil alokasi unit yang telah diperoleh berlaku untuk semua tabel objektif. Hasil alokasi unit dimasukkan ke dalam tabel objektif waktu supaya dapat memperoleh tabel akhir objektif waktu yang selanjutnya akan dihitung nilai optimalnya. Hasil akhir alokasi tabel objektif waktu disajikan pada Tabel 17.

Tabel 17. Alokasi Unit Tabel Objektif Waktu

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy	Supply (m ³)
KP I				1,379	1,379		3.000
KP II					0,4	4.918,381	9.450
KP III	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5		5.534
Ngagel I	4,484	1,7699	4,484	3,834	1,970		5.739
Ngagel II			431				431
Ngagel III		1,177	1,177				3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	8.760,927	27.754

Berdasarkan hasil akhir tabel objektif waktu, selanjutnya akan dihitung nilai optimal waktu Z_1 . Hasil alokasi yang telah diperoleh selanjutnya dimasukkan ke dalam fungsi objektif waktu. Sehingga didapatkan hasil optimasi waktu untuk distribusi air di PDAM Surya Sembada Kota

Surabaya dengan menggunakan model yang telah didapatkan adalah:

$$\text{Minimum } Z_1 = 1,379 \times 3000 + 0,4 \times 4918,381 + 2,5 \times 3501,91 + 2,5 \times 996,475 + 2,5 \times 1035,615 + 1,7699 \times 4230,794 + 4 \times 431 + 1,177 \times 878,898 = 30.185,898$$

Jadi nilai objektif waktu dapat diketahui yaitu 30.185,898 detik atau sama dengan 8 jam 23 menit 6 detik untuk satu hari.

Hasil alokasi unit yang telah diperoleh dimasukkan ke dalam tabel objektif. Dengan memasukkan hasil alokasi unit maka dapat memperoleh tabel akhir objektif biaya yang selanjutnya akan dihitung nilai optimalnya. Hasil akhir alokasi tabel objektif biaya disajikan pada Tabel 18.

Tabel 18. Alokasi Unit Tabel Objektif Biaya

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Dummy	Supply (m ³)
KP I				154,009	154,009		3.000
KP II					222,005		9.450
KP III	145,486	145,486	145,486	145,486	145,486		5.534
Ngagel I		246,006	246,006	246,006	246,006		5.739
Ngagel II			431				431
Ngagel III			182,869	182,869			3.600
Demand (m ³)	3.501,91	4.230,794	2.306,373	4.035,615	4.918,381	8.760,927	27.754

Berdasarkan hasil akhir tabel objektif biaya, selanjutnya akan dihitung nilai optimal biaya Z_2 . Hasil alokasi yang telah diperoleh selanjutnya dimasukkan ke dalam fungsi objektif biaya. Sehingga didapatkan hasil optimasi biaya untuk distribusi air di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya dengan menggunakan model yang telah didapatkan adalah:

$$\text{Minimum } Z_2 = 154,009 \times 3000 + 222,005 \times 4918,381 + 145,486 \times 3501,91 + 145,486 \times 996,475 + 145,486 \times 1035,615 + 246,006 \times 4230,794 + 155,6 \times 431 + 182,869 \times 878,898 = 3.627.443,876$$

Jadi nilai objektif biaya dapat diketahui yaitu Rp3.627.443,876 untuk satu hari.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi objektif waktu (Z_1) dan fungsi objektif biaya (Z_2) untuk permasalahan distribusi air bersih di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya adalah:

$$\text{Minimum } Z_1 = 0,69x_{14} + 0,69x_{15} + 0,4x_{25} + 0,833x_{31} + 0,833x_{32} + 0,833x_{33} + 1,25x_{34} + 1,25x_{35} + 1,379x_{41} + 0,769x_{42} + 1,379x_{43} + 1,177x_{44} + 0,635x_{45} + x_{51} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + 0,588x_{62} + 0,588x_{63}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimum } Z_2 = & 154,121x_{14} + 154,121x_{15} + \\ & 222,005x_{25} + 145,428x_{31} + 145,428x_{32} + \\ & 145,428x_{33} + 145,486x_{34} + 145,486x_{35} + \\ & 246,134x_{41} + 246,115x_{42} + 246,134x_{43} + \\ & 246,3x_{44} + 246,22x_{45} + 155,6x_{51} + 155,6x_{53} + \\ & 155,6x_{54} + 155,6x_{55} + 182,714x_{62} + 182,714x_{63} \end{aligned}$$

dengan kendala yang harus dipenuhi yaitu:

$$\begin{aligned} x_{14} + x_{15} & \leq 3000 \\ x_{25} & \leq 9450 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} & \leq 5534 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} & \leq 5739 \\ x_{51} + x_{53} + x_{54} + x_{55} & \leq 431 \\ x_{62} + x_{63} & \leq 3600 \\ x_{31} + x_{41} + x_{51} & \leq 3501,91 \\ x_{32} + x_{42} + x_{62} & \leq 4230,794 \\ x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} & \leq 2306,373 \\ x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{64} & \leq 4035,615 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} & \leq 4918,381 \\ x_{ij} & \geq 0; \text{ untuk semua } i = 1, 2, \dots, 6 \text{ dan} \\ j & = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Sedangkan fungsi keanggotaan masing-masing waktu dan biaya adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\text{waktu}}(x_{ij}^1) = \begin{cases} 1, & x_{ij}^1 \leq 0,4 \\ \frac{4,484 - x_{ij}^1}{4,484 - 0,4}, & 0,4 < x_{ij}^1 < 4,484 \\ 0, & x_{ij}^1 \geq 4,484 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{biaya}}(x_{ij}^2) = \begin{cases} 1, & x_{ij}^2 \leq 145,486 \\ \frac{246,509 - x_{ij}^2}{246,509 - 145,486}, & 145,486 < x_{ij}^2 < 246,509 \\ 0, & x_{ij}^2 \geq 246,509 \end{cases}$$

2. Waktu dan biaya optimal distribusi air bersih di PDAM Surya Sembada Kota Surabaya menggunakan *Multi-Objective Transportation Problem* masing-masing sebesar 8 jam 23 menit 6 detik dan Rp3.627.443,876.

Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengembangkan algoritma penyelesaian yang lebih beragam dan lebih optimal mengenai permasalahan *Multi-Objective Transportation Problem*.

DAFTAR PUSTAKA

- Aminudin. 2005. *Prinsip-prinsip Riset Operasi*. Jakarta: Erlangga.
- Herjanto, Eddy. 2008. *Manajemen Operasi Edisi Ketiga*. Jakarta: Grasindo.
- Hillier, Frederick S. and Lieberman, Gerald J.. 1990. *Pengantar Riset Operasi Edisi Kelima*. Terjemahan Gunawan, Ellen dan Mulia, Ardi Wirda. Jakarta: Erlangga.
- Kusumadewi, Sri dan Purnomo, Hari I.. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Ringuest, Jeffrey L. and Rinks, Dan B.. 1987. "Interactive Solutions for The Linear Multiobjective Transportation Problem". *Journal of Operational Research*. Vol. 32 (1987): pp 96-106.

Simbolon, Lolyta Damora, dkk. 2014. "Aplikasi Metode Transportasi dalam Optimasi Biaya Distribusi Beras Miskin (Raskin) pada Perum Bulog Sub Divre Medan". *Jurnal Matematika*. Vol. 2 (3): hal. 299-311.

Taha, Hamdy A.. 2003. *Operations Research: An Introduction Seventh Edition*. United States of America: Pearson Education.

Yeola, M. Chandrakant. 2016. *A Study on Multi Objective Transportation Problem by Using Fuzzy Programming Technique*. India: Swami Ramanand Teerth Marathwada University.